DR. ALEXANDER PREUß
MULTIVARIATE STATISTISCHE VERFAHREN
WINTERSEMESTER 2013/14

Aufgaben für einen Mittelseminarschein

Teil I – Lineare Algebra

1. a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\underline{a}' = (1, 3, 7, 2)$ und $\underline{b}' = (2, 4, -2, 0)$ zueinander orthogonal sind.

   b) Wie groß ist der von den Vektoren $\underline{a}' = (1, 2, 3, 4, 5)$ und $\underline{b}' = (4, 5, 1, 2, 3)$ eingeschlossene Winkel?

2. X und Y seien standardisierte Variablen, also $\bar{x} = 0$ und $s_x = 1$ bzw. $\bar{y} = 0$ und $s_y = 1$. $\underline{x}$ und $\underline{y}$ seien die entsprechenden Vektoren, deren Komponenten die Variablenwerte von X und Y bilden.

   a) Geben Sie die Standardabweichung von X und Y sowie die Kovarianz von X und Y unter Verwendung der Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ an.

   b) Zeigen Sie, daß die Produkt-Moment-Korrelation zwischen X und Y gleich dem Kosinus des Winkels ist, der von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ eingeschlossen wird.

3. Zeigen Sie, daß das Vektorsystem

   $\underline{x}_1 = (1, 1, 0, 1)'$
   $\underline{x}_2 = (0, 1, 1, 0)'$
   $\underline{x}_3 = (1, 1, 0, 1)'$
   $\underline{x}_4 = (1, 0, 0, 0)'$

   linear abhängig ist.

4. Beweisen Sie, daß

   a) $\mathrm{tr}\,(\underline{A} + \underline{B}) = \mathrm{tr}\,\underline{A} + \mathrm{tr}\,\underline{B}$

   b) $\mathrm{tr}\,\underline{AB} = \mathrm{tr}\,\underline{BA}$

5. a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$.

   b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

6. $\underline{T}$ sei eine orthogonale Matrix.

   a) Berechnen Sie $\underline{T}'\underline{T}$.

b) Zeigen Sie, daß $\underline{T}^{-1} = \underline{T}'$.

7. Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\underline{A}^{-1}$ und zeigen Sie, daß $\underline{AA}^{-1} = \underline{I}$.

8. Finden Sie eine Näherungslösung im Sinn der kleinsten Quadrate für das Gleichungssystem

$x = 1$
$x = 2$
$x = 3$

Welche statistische Eigenschaft hat x?

9. a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{S} = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

b) Die Matrix $\underline{S}$ aus Teil a) hat den Rang 2. Nähern Sie diese Matrix durch eine Matrix $\underline{S}$* mit Rang $\underline{S}^{*} = 1$ im Sinne der kleinsten Quadrate an.

10. Beweisen Sie, daß

a) der Rang einer symmetrischen Matrix gleich der Zahl ihrer von Null verschiedenen Eigenwerte ist.

b) die Determinante einer symmetrischen Matrix gleich dem Produkt ihrer Eigenwerte ist.

Teil II – Multivariate Verfahren

Rechnen Sie eine multiple Regression für ein Beispiel Ihrer Wahl. Gehen Sie dabei auf zentrale Größen wie das multiple R^2 und die Signifikanz der erklärenden Variablen ein.

Alternativ:

Rechnen Sie eine Hauptkomponentenanalyse (PCA) für ein Beispiel Ihrer Wahl. Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar und interpretieren Sie es. Gehen Sie auch auf die Anpassungsgüte ein.